

FOTOMETRIA RELATIVA CON I CCD*

FERDINANDO PATAT

European Southern Observatory - fpatat@eso.org
Settembre 2006

1. Introduzione

Si supponga di aver osservato un certo campo stellare che includa sia l'oggetto di cui si vuole determinare la magnitudine, sia un certo numero di stelle di campo, le cui magnitudini e colori in un certo sistema fotometrico siano noti. Ovviamente, il fatto di disporre della fotometria di oggetti nel campo rende l'operazione molto più semplice, in quanto ciò permette di risolvere (almeno in larga parte) il problema causato dalla mancata conoscenza delle condizioni di trasparenza del cielo al momento delle osservazioni ed i coefficienti di estinzione nelle varie bande.

Nel seguito assumiamo che il lettore abbia un minimo di familiarità con la fotometria e perciò richiameremo solo molto brevemente i concetti fondamentali.

In generale, si definisce come **magnitudine strumentale** m la seguente quantità:

$$m = -2.5 \log f + 2.5 \log t_{exp}$$

dove f è il flusso complessivo misurato sull'oggetto in questione e t_{exp} è il tempo di posa espresso in secondi. In realtà, visto che in queste note si discute del solo caso della fotometria relativa, la normalizzazione al tempo di posa è del tutto irrilevante e si può semplicemente scrivere:

$$m = -2.5 \log f$$

Per oggetti stellari in campi non affollati, il flusso f viene comunemente misurato usando quella che viene definita **fotometria d'apertura**, e cioè sommando il valore di tutti i pixel entro un cerchio centrato sull'oggetto e con un raggio sufficiente da coprire tutta l'immagine di seeing. Naturalmente, al valore di ogni pixel deve essere sottratto il contributo del fondo, che viene in genere stimato in una regione vicina all'oggetto e libera da altri oggetti stellari.

Nel seguito, indicheremo con f_* il flusso misurato sulla stella da calibrare, mentre con f_i indicheremo il flusso

misurato, sulla stessa immagine, per la stella di riferimento i -esima. Allo stesso modo, indicheremo con m_* e m_i le magnitudini strumentali del nostro oggetto e della generica stella di riferimento, rispettivamente. Indicheremo invece con lettere maiuscole le magnitudini calibrate (M_* e M_i).

2. Punto zero e termine di colore

Nel caso in cui il nostro sistema fotometrico (che è composto dal CCD, dai filtri, dal telescopio e dall'atmosfera soprastante) sia identico a quello in cui sono espresse le magnitudini delle stelle di riferimento, il nostro problema sarebbe triviale. In tali circostanze, infatti, le differenze fra magnitudini strumentali e magnitudini calibrate sarebbero identiche (entro gli errori di misura), ovvero $m_* - m_i = M_* - M_i$. Disponendo di N stelle di campo con fotometria nota, gli effetti degli errori di misura si possono ridurre calcolando la media delle differenze fra le magnitudini calibrate e strumentali delle stelle di riferimento:

$$M_* = m_* + \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (M_i - m_i)}{N}$$

che si può scrivere in forma più compatta come

$$M_* = M_0 + m_*$$

dove M_0 è spesso indicato come **punto zero**, ed è caratteristico della strumentazione usata.

In realtà, nelle situazioni pratiche, il nostro sistema fotometrico sarà diverso da quello in cui è stata ottenuta la fotometria di riferimento. Quello che accade, in pratica, è che le bande passanti del nostro sistema non saranno esattamente uguali a quelle di riferimento e, quindi, misureremo dei flussi che saranno leggermente diversi da quelli che uno misurerebbe se disponesse del sistema di riferimento. Ciò è essenzialmente dovuto al fatto che nessun oggetto celeste ha uno spettro piatto. Fortunatamente, almeno nel caso di stelle non troppo

*Copyright Gruppo Astronomico Polse di Còugnes - UD - Friùl.

esotiche, gli spettri sono abbastanza regolari ed è possibile applicare delle correzioni lineari alle magnitudini ottenute, in modo da compensare per la deviazione dal sistema fotometrico standard. Questo termine correttivo è spesso indicato come **termine di colore**.

Anche il termine di colore è una caratteristica del sistema fotometrico che stiamo usando e va determinato, appunto, usando delle stelle per le quali qualcuno abbia già ottenuto le magnitudini nel sistema di riferimento.

Siccome la correzione per termine di colore dipende dal colore dell'oggetto che stiamo osservando (e cioè dalla forma del suo spettro), è necessario a questo punto introdurre il concetto di **indice di colore** che, in astronomia, non è altro che la differenza fra le magnitudini misurate in due bande diverse e viene indicato con la differenza fra le due magnitudini tra parentesi:

$$(M^a - M^b) = M^a - M^b$$

ad esempio, con $(B - V) = +0.2$ si indica l'indice di colore di un oggetto che ha magnitudini $B = 12.2$ e $V = 12.0$ nelle bande B e V di Johnson. In generale, la prima delle due bande è più blu della seconda. Inoltre, visto che la scala delle magnitudini ha il vizio di essere inversa (oltre che logaritmica), oggetti con indice di colore piccolo sono più blu di quelli con indice di colore grande.

In generale, l'equazione di colore viene scritta nel modo seguente:

$$A = A_0 + a + \gamma_{A-B}^A (A - B)$$

dove A, B e a, b sono le magnitudini (calibrate e strumentali) in due bande A e B . In questa equazione, A_0 è il **punto zero**, mentre γ_{A-B}^A è il **termine di colore**.

Nel caso pratico delle bande B, V ed R , questa espressione generale può essere riscritta come segue:

$$B = B_0 + b + \gamma_{B-V}^B (B - V)$$

$$V = V_0 + v + \gamma_{B-V}^V (B - V)$$

$$R = R_0 + r + \gamma_{V-R}^R (V - R)$$

Quindi, una volta che si conoscano i punti zero ed i termini di colore, data la magnitudine strumentale si può subito passare alla magnitudine calibrata. È importante notare che i termini di colore si riferiscono ad una certa banda (ad esempio la V) ma anche ad un certo colore (ad esempio il $(B - V)$).

3. Calcolo della soluzione fotometrica

Il calcolo del punto zero e del termine di colore viene generalmente effettuato utilizzando dei campi standard fotometrici (tipicamente quelli di Landolt o di Stetson). Tuttavia, il procedimento da applicare al caso della fotometria relativa è il medesimo.

Riprendiamo in mano, ad esempio, l'equazione di colore per la banda B presentata nella sezione precedente. Per ciascuna delle stelle di riferimento possiamo riscrivere quell'equazione nel seguente modo:

$$B_i - b_i = B_0 + \gamma_{(B-V)}^B (B - V)_i$$

Da questa semplice relazione si capisce come, nel caso ideale, i punti che rappresentano ciascuna stella si distribuiscono sul piano $(B - V)$, $B - b$ lungo una retta di cui il punto zero B_0 è l'intercetta ed il termine di colore γ_{B-V}^B la pendenza. A causa degli errori di misura (ma anche degli inevitabili errori nella calibrazione fotometrica delle stelle di riferimento), i punti si distribuiscono *attorno* alla retta più che *sulla* retta.

Per comprendere meglio il procedimento, facciamo un esempio pratico. Supponiamo di disporre di un set di $N=10$ stelle di riferimento, di averne misurato i flussi integrati f_i e di averne calcolato le magnitudini strumentali m_i , come riportato in Tab. 1.

Fatto questo, costruiamo un grafico in cui in ascissa poniamo i valori di $(B - V)_i$ ed in ordinata quelli di $B_i - b_i$. Quello che otteniamo è presentato in Fig. 1, in cui si vede come i punti si distribuiscono lungo la retta di colore. Il passo successivo è la determinazione della pendenza e dell'intercetta di questa retta. Usualmente ciò viene realizzato utilizzando il **metodo dei minimi quadrati**, disponibile in molti programmi per la rappresentazione grafica dei dati. In Fig. 1 la linea rossa rappresenta la soluzione fornita da questo metodo (le Figg. 2 e 3 mostrano i risultati per la banda V e la banda R rispettivamente).

Molto brevemente, se poniamo $x_i = (B - V)_i$ e $y_i = B_i - b_i$ e calcoliamo

$$\Delta = N \sum x_i^2 - \left[\sum x_i \right]^2$$

il punto zero e il termine di colore si ottengono dalle seguenti espressioni:

$$B_0 = \left[\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i \right] / \Delta$$

$$\gamma_{B-V}^B = \left[N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \right] / \Delta$$

i	B_i	V_i	R_i	$(B - V)_i$	$(V - R)_i$	b_i	v_i	r_i
1	12.10	12.08	11.96	+0.02	+0.12	-6.95	-7.43	-8.14
2	12.23	11.34	10.56	+0.89	+0.78	-6.80	-8.23	-9.51
3	11.83	11.84	11.80	-0.01	+0.04	-7.15	-7.72	-8.29
4	13.10	11.87	10.85	+1.23	+1.02	-6.06	-7.70	-9.24
5	13.32	12.98	12.76	+0.34	+0.22	-5.65	-6.55	-7.34
6	11.12	9.22	8.35	+1.90	+0.87	-8.07	-10.36	-11.74
7	11.56	11.68	11.71	-0.12	-0.03	-7.42	-7.79	-8.40
8	12.23	10.95	9.97	+1.28	+0.98	-6.89	-8.65	-10.11
9	12.24	11.68	11.12	+0.56	+0.56	-6.80	-7.88	-8.97
10	11.99	10.98	9.75	+1.01	+1.23	-7.13	-8.59	-10.33

Table 1: Magnitudini, colori e magnitudini strumentali per le stelle di riferimento.

Nel caso del nostro esempio, si trovano i seguenti risultati: $B_0=18.989$ e $\gamma_{B-V}^B=0.106$. Naturalmente, si può anche calcolare la deviazione standard σ_{B-b} dei dati dalla relazione trovata, definita come segue:

$$\sigma_{B-b}^2 = \frac{1}{N-2} \sum [y_i - (B_0 + \gamma_{B-V}^B x_i)]^2$$

Di nuovo, nel caso del nostro esempio, si ottiene $\sigma_{B-b}=0.034$. Questo valore ci dà un'idea della tipica accuratezza con cui abbiamo misurato le singole stelle di riferimento, che risulta essere pari a circa 3 centesimi di magnitudine.

Il metodo dei minimi quadrati ci permette anche di stimare gli errori che commettiamo sul punto zero ed il termine di colore, che si possono calcolare come segue:

$$\sigma_{B_0}^2 = \sigma_{B-b}^2 \sum x_i^2 / \Delta$$

$$\sigma_{\gamma_{B-V}^B}^2 = N \sigma_{B-b}^2 / \Delta$$

Per i dati riportati in Tab. 1 risulta essere: $\sigma_{B_0}=0.018$ e $\sigma_{\gamma_{B-V}^B}=0.019$.

Ovviamente, il discorso può essere esteso alle bande V ed R , utilizzando lo stesso procedimento. I risultati, per tutte e tre le bande, sono riportati in Tab. 2.

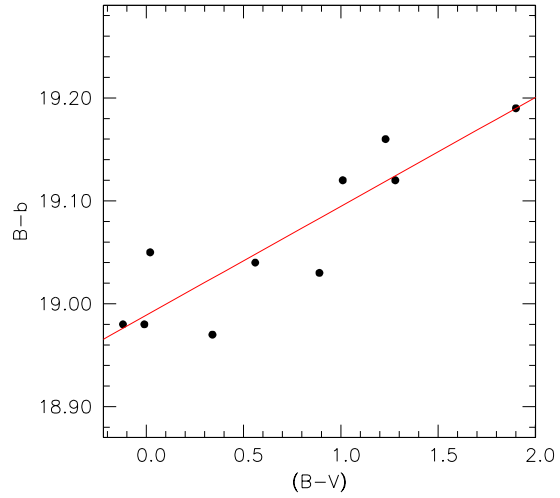
Riassumendo, le nostre soluzioni fotometriche si possono scrivere come segue:

$$B = b + 18.989 \pm 0.018 + (0.106 \pm 0.019)(B - V)$$

$$V = v + 19.520 \pm 0.012 + (0.044 \pm 0.012)(B - V)$$

$$R = r + 20.101 \pm 0.004 + (-0.018 \pm 0.006)(V - R)$$

dove per ciascuno dei parametri ottenuti abbiamo indicato anche le incertezze associate.

Figure 1: Fit ai minimi quadrati per la banda B .

Naturalmente, siccome per calibrare la magnitudine dell'oggetto in esame si deve conoscere anche il suo colore, ci servono pure delle relazioni che leghino il colore strumentale a quello standard, che saranno del tipo:

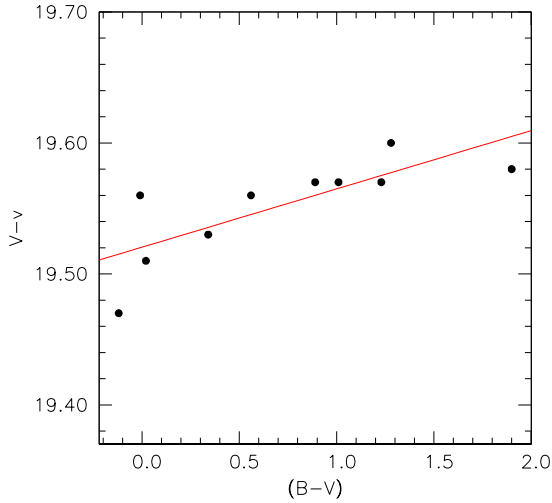
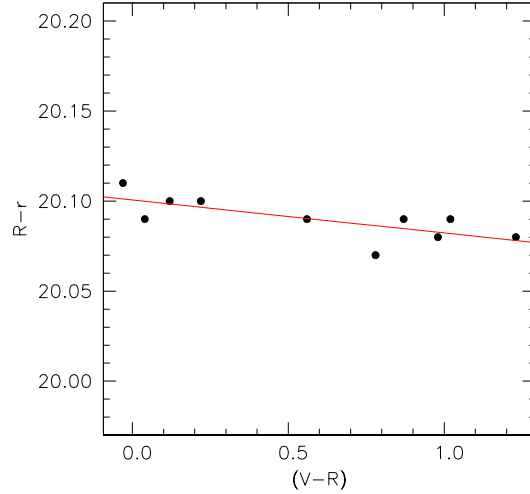
$$(B - V) = (B - V)_0 + \kappa_{B-V}(b - v)$$

$$(V - R) = (V - R)_0 + \kappa_{V-R}(v - r)$$

Il procedimento è del tutto analogo a quello operato per i punti zero ed i termini di colore. Ad esempio, per ottenere la relazione tra $(b - v)$ e $(B - V)$ si applica il metodo dei minimi quadrati ai punti che hanno per coordinate $x_i = b_i - v_i$ e $y_i = (B - V)_i$, come mostrato in Fig. 4 (v. anche Fig. 5 per il caso di

Banda	Colore	a_0	σ_{A_0}	γ	σ_γ	σ
B	$(B - V)$	18.989	0.018	0.106	0.019	0.034
V	$(B - V)$	19.520	0.012	0.044	0.012	0.023
R	$(V - R)$	20.101	0.004	-0.018	0.006	0.007

Table 2: Risultato del fitting ai minimi quadrati per i dati dell'esempio.

Figure 2: Fit ai minimi quadrati per la banda V .Figure 3: Fit ai minimi quadrati per la banda R .

$(V - R)$). E' importante notare come κ_{B-V} e κ_{V-R} siano diversi da γ_{B-V}^B e γ_{V-R}^R . I risultati che si ottengono per il caso in esame sono i seguenti:

$$(B - V) = -0.559 \pm 0.038 + (1.059 \pm 0.029)(b - v)$$

$$(V - R) = -0.633 \pm 0.032 + (1.085 \pm 0.027)(v - r)$$

dove per ciascuno dei parametri ottenuti dal best fit abbiamo indicato anche le incertezze associate.

4. Calibrazione fotometrica ed errori

Supponiamo ora di aver misurato i seguenti flussi nelle bande B , V ed R per l'oggetto di cui vogliamo determinare le magnitudini: $f_B=283.1$, $f_V=597.0$ e $f_R=1191.2$. Questi valori corrispondono alle magnitudini strumentali $b=-6.13$, $v=-6.94$ e $r=-7.69$. Con l'ausilio delle ultime due equazioni della sezione precedente calcoliamo innanzitutto gli indici di colore

dell'oggetto, che risultano essere: $(B - V)=+0.299$ e $(V - R)=+0.181$.

Inserendo questi valori e i valori delle magnitudini strumentali nelle tre equazioni che esprimono B , V ed R , otteniamo infine $B=12.891$, $V=12.592$ e $R=12.411$ ¹. Quello che rimane da fare è stimare gli errori. Innanzitutto chiariamo che nel procedimento descritto in queste note vi sono tre cause di errore:

- gli errori nella fotometria di riferimento
- gli errori di misura nelle stelle di riferimento
- l'errore di misura nell'oggetto in esame

Per semplicità, assumeremo qui che la prima sorgente di incertezza sia trascurabile, ovverosia che la fotometria di riferimento abbia un'accuratezza molto più grande di quanto siamo in grado di raggiungere noi con le nostre misure.

Detto questo, esaminiamo di nuovo l'equazione di colore per la banda B (per le altre bande il ragionamento è ovviamente analogo):

¹Se ho fatto tutti i conti giusti...

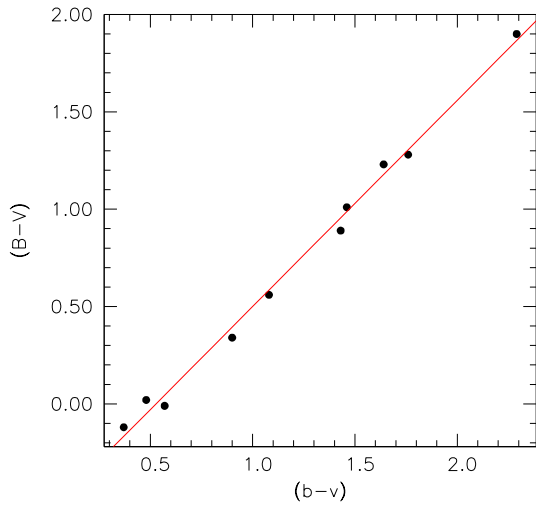


Figure 4: Fit ai minimi quadrati per il colore $(B - V)$.

$$B = B_0 + b + \gamma_{B-V}^B (B - V)$$

Le quantità che intervengono in questa relazione sono la magnitudine strumentale del nostro oggetto b , il punto zero B_0 , il termine di colore γ ed il colore dell'oggetto $(B - V)$. Se definiamo come σ_b , σ_{B_0} , σ_γ e σ_{B-V} le incertezze su queste quantità, l'applicazione di un procedimento noto come *propagazione degli errori*, porta alla seguente espressione per l'errore globale sulla magnitudine:

$$\sigma_B = \sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_{B_0}^2 + \sigma_\gamma^2 (B - V)^2 + \sigma_{B-V}^2 \gamma^2}$$

dove, a sua volta,

$$\sigma_{B-V}^2 = \sigma_{(B-V)_0}^2 + \sigma_{\kappa_{B-V}}^2 (b - v)^2 + \kappa_{B-V}^2 \sigma_{b-v}^2$$

Mentre gli errori sui parametri B_0 , γ_{B-V}^B , $(B - V)_0$ e κ_{B-V} ci vengono forniti dal metodo dei minimi quadrati (vedi sezione precedente), restano da stimare gli errori sulle misura della magnitudine strumentale del nostro oggetto, e cioè σ_b , σ_v e σ_r . Fatto questo, l'errore sul colore strumentale sarà semplicemente $\sigma_{b-v} = \sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_v^2}$.

Se l'oggetto in questione ha magnitudine comparabile con quella delle stelle di riferimento, uno può fare l'assunzione che l'errore sulla magnitudine strumentale dell'oggetto sia simile a quello stimato dalla deviazione

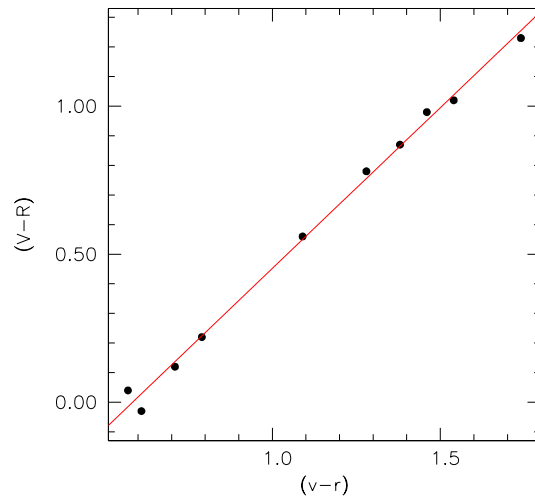


Figure 5: Fit ai minimi quadrati per il colore $(V - R)$.

standard fornita dal metodo dei minimi quadrati (σ_{B-b} nella sezione precedente). Nel caso del nostro esempio ciò equivale a porre $\sigma_b=0.034$, $\sigma_v=0.023$ e $\sigma_r=0.007$.

Con questa assunzione uno ricava $\sigma_{B-V}=0.047$ e $\sigma_{V-R}=0.039$. Sostituendo questi valori nell'espressione per σ_B (e in quelle analoghe per σ_V e σ_R) si ottiene $\sigma_B=0.038$, $\sigma_V=0.026$, $\sigma_R=0.008$, che sono solo leggermente superiori agli errori σ_b , σ_v e σ_r (questo a causa del fatto che le stime sui parametri delle equazioni di colore erano piuttosto buone. In questo caso, di fatto, è ad esempio $\sigma_B \approx \sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_{B_0}^2}$, mentre si possono trascurare gli errori sui restanti parametri).

Pertanto, le stime finali delle magnitudini e degli indici di colore del nostro oggetto sono le seguenti:

$$B = 12.89 \pm 0.04$$

$$V = 12.59 \pm 0.03$$

$$R = 12.41 \pm 0.01$$

$$(B - V) = +0.30 \pm 0.05$$

$$(V - R) = +0.18 \pm 0.04$$

Appendice: stima dell'errore σ_m

Un metodo molto in uso per stimare l'errore sulla magnitudine strumentale σ_m in funzione della magnitudine stessa consiste nel generare con un calcolatore un grande numero di **stelle artificiali** di magnitudine nota sull'immagine originale, aventi la stessa forma di quelle effettivamente osservate. Per ciascuna di queste stelle artificiali si misura la magnitudine e, dal confronto con quella in ingresso, si calcola l'errore. Visto il grande numero di stelle artificiali generate, è così possibile calcolare la deviazione standard per ogni dato intervallo di magnitudine strumentale.

Questo metodo ha il vantaggio di includere implicitamente nella stima degli errori le proprietà del rivelatore CCD, il fondo cielo e gli errori introdotti dal metodo di misura applicato per derivare la magnitudine.

L'implementazione di tale procedura non è affatto complicata e, anzi, molti software per la fotometria includono questo tipo di simulazioni.

Qui ci limiteremo invece a descrivere la procedura per stimare l'errore sulla magnitudine strumentale in via analitica, partendo dalle proprietà del rivelatore, della brillantezza del fondo cielo e dalla statistica dei fotoni.

Essenzialmente dobbiamo tener conto di tre sorgenti di rumore:

1. rumore di lettura (Read Out Noise o RON);
2. rumore fotonico dell'oggetto;
3. rumore fotonico del fondo cielo;

Il rumore di lettura è generato dall'elettronica e viene determinato dall'analisi del bias. Basterà misurare la deviazione standard su un'immagine di bias e convertire questo numero in elettroni. Ciò viene fatto semplicemente moltiplicando tale valore per il guadagno g (gain), parametro che deve essere noto e che usualmente viene espresso in elettroni/ADU².

Il rumore fotonico obbedisce alla distribuzione di Poisson e dunque, se S è il flusso totale f_* espresso in elettroni ($S = g \times f_*$), il rumore sul segnale è dato da $\sigma_S = \sqrt{S}$.

Leggermente più complesso è il caso del fondo cielo. Se il fondo cielo espresso in elettroni è B , anche in questo caso il rumore associato al *singolo pixel* obbedisce alla statistica di Poisson, e dunque $\sigma_B = \sqrt{B}$. In realtà, quando integriamo il flusso della stella sull'area coperta dal disco di seeing, integriamo anche il rumore prodotto dal fondo cielo. Se r_a è il raggio del cerchio

utilizzato nella misura della magnitudine di apertura (espresso in pixel), il numero totale di pixel inclusi nell'apertura sarà $n_p = \pi r_a^2$

Sommando in quadratura i tre errori si ottiene:

$$\sigma_S = \sqrt{S + (B + RON^2) n_p}$$

Chiaramente, se il seeing è cattivo, l'integrazione verrà effettuata su un numero maggiore di pixel, e dunque l'errore sulla misura andrà aumentando. Avendo a disposizione σ_S si può formare il **rapporto segnale/rumore** (SNR), che nel nostro caso risulta essere:

$$SNR = \frac{S}{\sigma_S} \equiv \frac{S}{\sqrt{S + (B + RON^2) n_p}}$$

Nel caso in cui l'oggetto sia debole e il fondo cielo elevato (per esempio se il tempo di esposizione è abbastanza lungo), i rumori prodotti dalla sorgente e dall'elettronica possono essere trascurati e questo rapporto si riduce a:

$$SNR = \frac{S}{\sqrt{B n_p}}$$

Per ottenere l'errore σ_m sulla magnitudine a partire dall'errore σ_S sul flusso, basterà propagare σ_S nella ben nota espressione $m = -2.5 \log f$. Ciò facendo si ottiene:

$$\sigma_m = 1.086 \frac{\sigma_f}{f} \equiv \frac{1.086}{SNR} \approx \frac{1}{SNR}$$

ovverosia, l'errore quadratico medio espresso in magnitudini è circa uguale all'inverso del rapporto segnale/rumore.

Facciamo un esempio. Supponiamo di aver misurato $f_*=9500$ ADU sul nostro detector, che ha un guadagno $g=1.5$ elettroni/ADU ed un rumore di lettura $RON=25$ elettroni. Il fondo cielo, misurato in un'area libera da oggetti stellari, è di 5000 ADU/pixel. Visto il valore di g , il nostro segnale sarà $S=14250$ elettroni, mentre il fondo cielo sarà $B=7500$ elettroni/pixel. Infine, siccome il seeing era di 3.5 pixel (FWHM), abbiamo usato un'apertura avente $r_a=2$ FWHM = 7 pixel, in modo che il numero totale di pixel usati è $n_p=38.5$.

Ne segue che:

$$SNR = \frac{14250}{\sqrt{14250 + 38.5 \times (7500 + 625)}} \simeq 24.4$$

da cui deduciamo che l'incertezza sulla magnitudine strumentale è $\sigma_m=0.045$.

²ADU=Analog/Digital Units.